Clase 16

Física 1 (químicos)

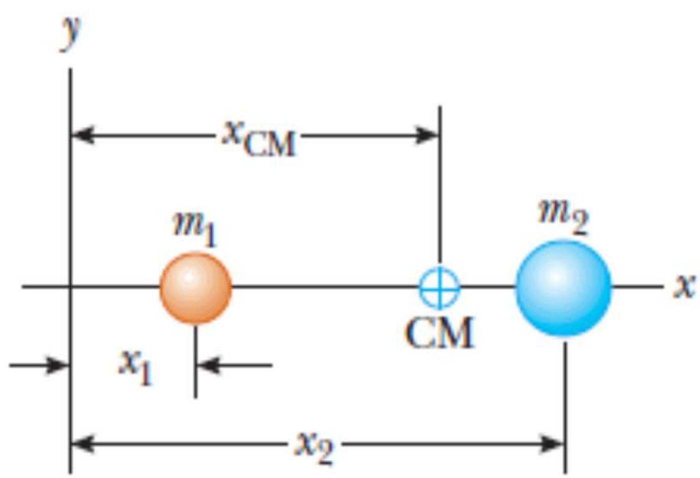
MODALIDAD VIRTUALIZADA

(pandemia de COVID19)

Clase basada en Serway-JEWETT séptima edición

REPASO

Centro de masa



$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

1D N particulas

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

3D N particulas

REPASO

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

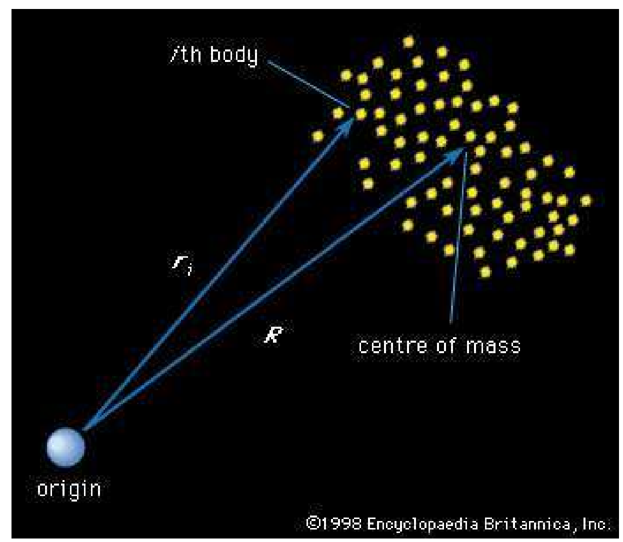
$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}$$

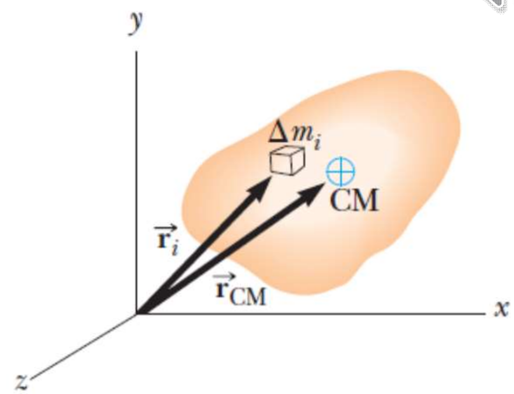
$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

donde

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$



Objeto extendido



$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i \, \Delta m_i$$

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i \, \Delta m_i = \frac{1}{M}\int x \, dm$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

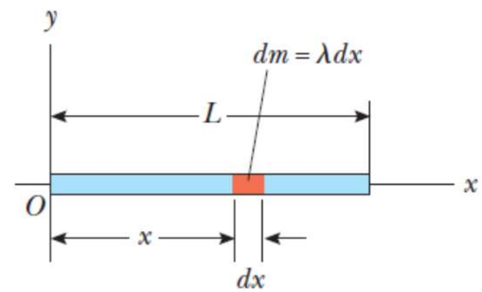
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y \, dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z \, dm$$

=>

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}} \, dm}$$

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.[3] Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se encuentra a medio camino entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o un cubo se encuentra en su centro geométrico.

El centro de masa de una barra



$$y_{CM} = z_{CM} = 0.$$

La masa por unidad de longitud (esta cantidad se llama *densidad de masa lineal*) se puede escribir como $\lambda = M/L$ para la barra uniforme. Si la barra se divide en elementos de longitud dx, la masa de cada elemento es $dm = \lambda\, dx$.

para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Sustituya $\lambda = M/L$:

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \boxed{\frac{L}{2}}$$

Ya que un objeto extendido es una distribución de masa continua, en cada elemento pequeño de masa actúa la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa a través de un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si $\vec{\mathbf{g}}$ es constante sobre la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido gira sobre un eje en su centro de gravedad, se equilibra en cualquier orientación.

REPASO

Movimiento de un sistema de partículas

Velocidad del centro de masa

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la i–ésima partícula.

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{tot}}$$

La cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}$

REPASO

Aceleración del centro de masa

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i$$

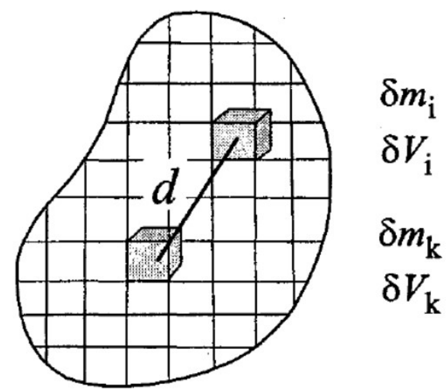
$$M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}}}$$

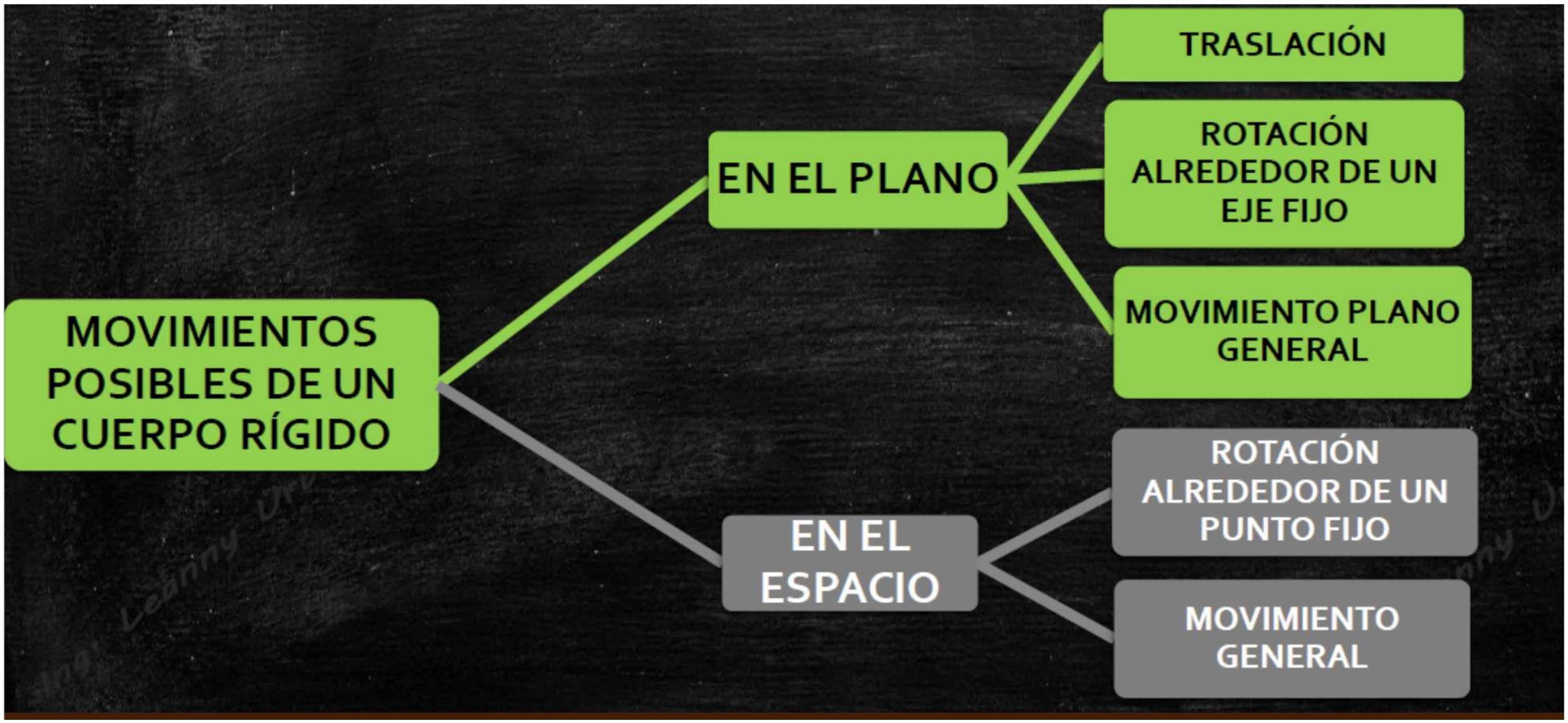
El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Cuerpo *rígido*: Es un caso especial de un sistema de muchas partículas, y considera que *la distancia entre las partículas de estos cuerpos permanece constante* (R = constante). o sea son absolutamente indeformables. En otras palabras, se entiende por cuerpo rígido a aquel cuya forma no varía pese a ser sometido a la acción de fuerzas externas. Eso supone que la distancia entre las diferentes partículas que lo conforman resuelta invariable a lo largo del tiempo.



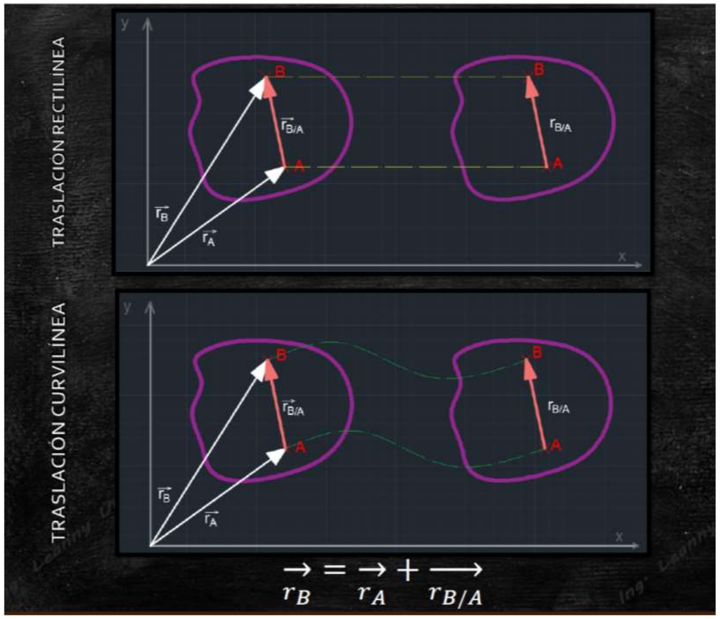
La cinemática de cuerpos rígidos se encarga del estudio de las relaciones existentes entre el cuerpo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las diferentes partículas que forman un cuerpo rígido.

Posibles movimientos de un cuerpo rígido

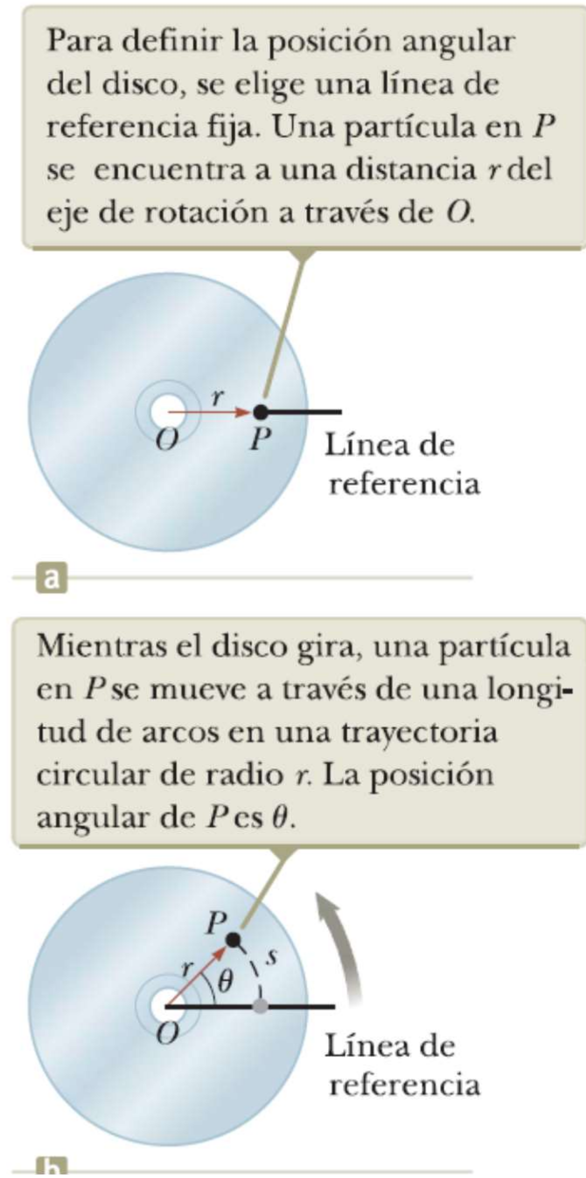


Traslación:

Este tipo de movimiento ocurre cuando toda línea recta que pertenezca al cuerpo en estudio mantiene la misma dirección durante el movimiento. También, puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una traslación rectilínea; si las trayectorias so líneas curvas, el movimiento es una traslación curvilínea.

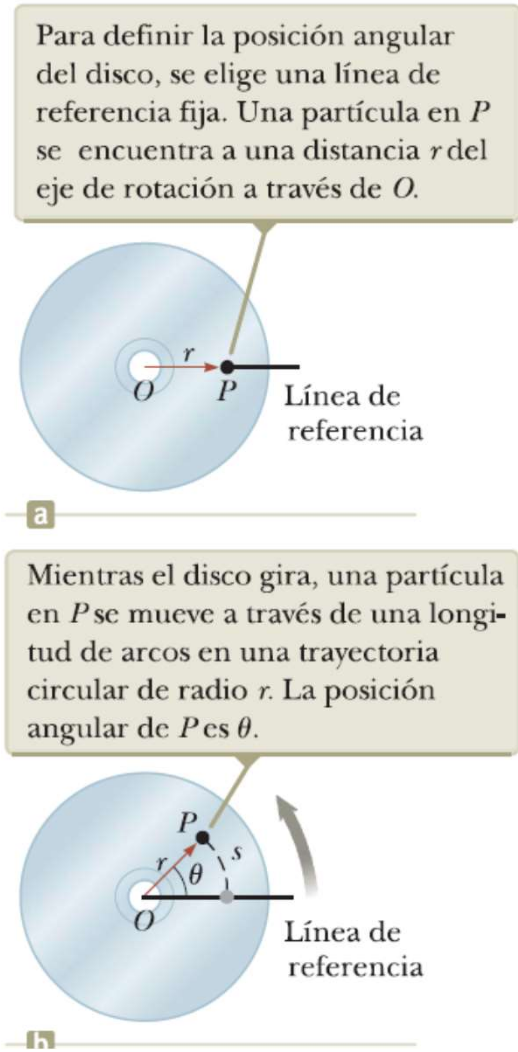


Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo



Posición, velocidad y aceleración angular

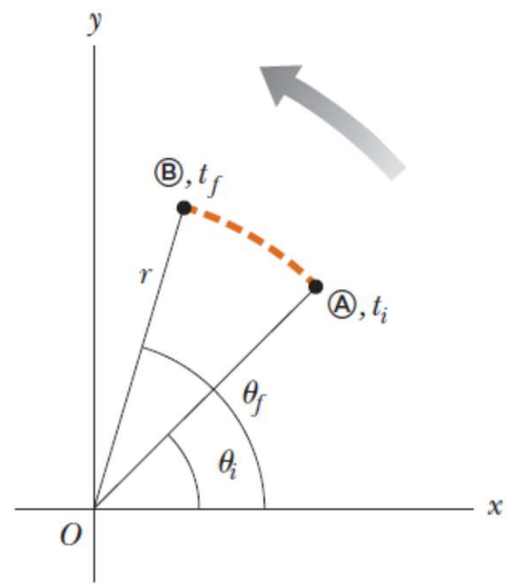
En las ecuaciones rotacionales, *debe* usar ángulos expresados en radianes. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en las ecuaciones rotacionales.



$$s = r\theta$$

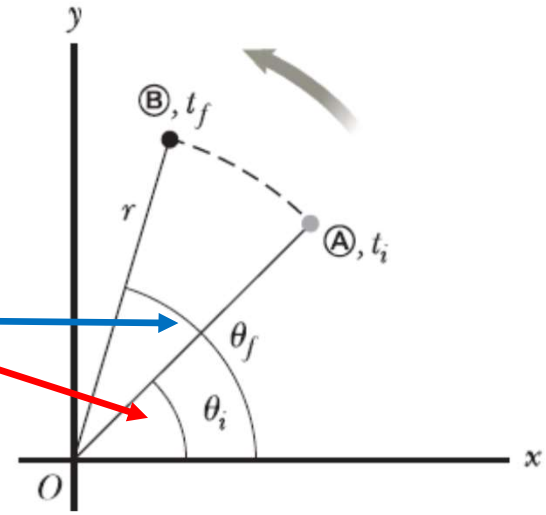
$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180°}\,\theta(\text{grados})$$



Desplazamiento angular

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$



Rapidez angular promedio

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme Δt tiende a cero:

Rapidez angular instantánea

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

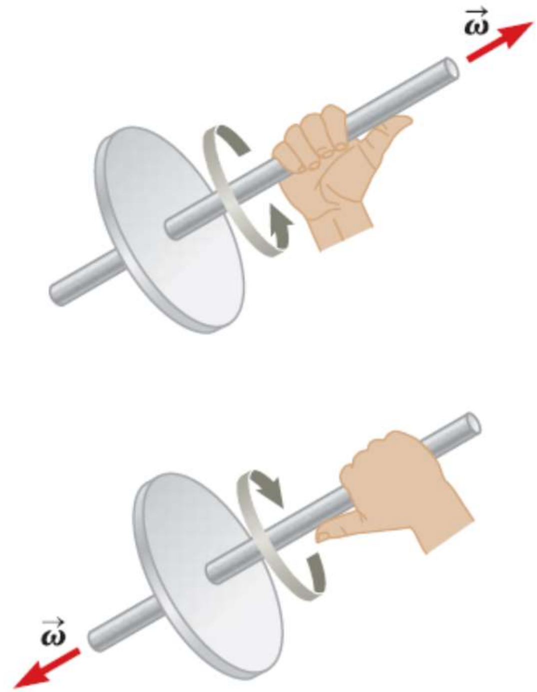
Aceleración angular promedio

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular instantánea

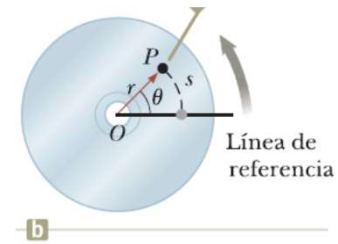
$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \equiv d\vec{\boldsymbol{\omega}} / dt.$$



Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular.

Análisis de modelo: objeto rígido bajo aceleración angular constante



Integrando $d\omega/dt$ con ω_i a t_i=0

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

Integrando $d\theta/dt$ con θ_I a t_i=0

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

Y despejando t de la ecuacion de arriba, reemplazandola en la siguiente obtenemos

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f.

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional

Objeto rígido bajo aceleración angular constante	Partícula bajo aceleración constante
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

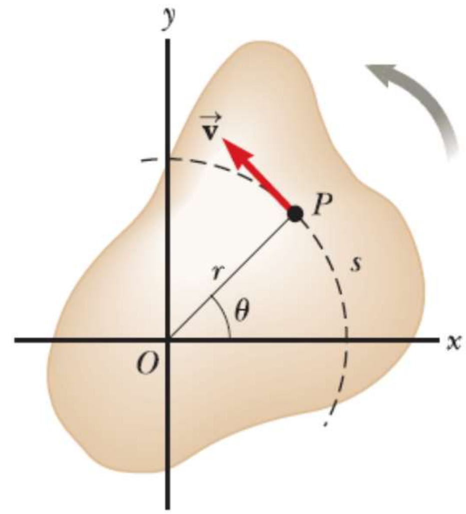
Notar que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo aceleración angular constante son de la misma forma matemática que para una partícula bajo aceleración constante

Se generan a partir de las ecuaciones para movimiento traslacional al hacer las sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$ y $a \rightarrow \alpha$.

Cantidades angulares y traslacionales

Ya que el punto P en la figura se mueve en un círculo, el vector velocidad traslacional $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es tangente a la trayectoria circular y, por ende, se llama *velocidad tangencial.* La magnitud de la velocidad tangencial del punto P es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde s es la distancia que recorre este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Al recordar que $s = r\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$



Ya que $d\theta/dt = \omega$

$$\boxed{v = r\omega}$$

Podemos relacionar la aceleración angular del objeto rígido en rotación con la aceleración tangencial del punto P al tomar la derivada en el tiempo de v:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

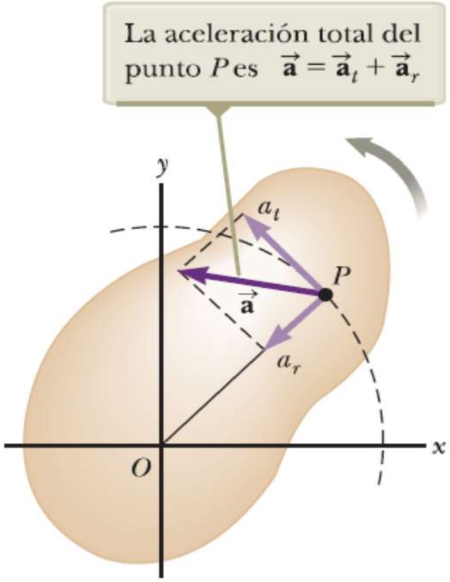
$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

Es decir, la componente tangencial de la aceleración traslacional de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular del punto desde el eje de rotación multiplicada por la aceleración angular.

un punto que se mueve en una trayectoria circular experimenta una aceleración radial a_r dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r

Ya que $v = r\omega$:

=> $$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$



A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O, el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r.

El vector aceleración total en el punto es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$, donde la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es la aceleración centrípeta a_c. Ya que $\vec{\mathbf{a}}$ es un vector que tiene una componente radial y una componente tangencial, la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ en el punto P sobre el objeto rígido en rotación es

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_r^{\,2}} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$